# Guía de Ejercicios:
# Sistemas de Ecuaciones en Diferencias

## 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos

### 1.1. Soluciones Generales y Particulares

**Consigna:** Para los siguientes sistemas de ecuaciones, hallar la solución general. Si se proveen condiciones iniciales, encontrar también la solución particular. Analizar la estabilidad de la solución en cada caso.

1. $$\begin{cases} y_{t+1} + x_t - 2y_t = 0, \\ x_{t+1} + 2y_t - 4x_t = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y_{t+1} = y_t - 5z_t, \\ z_{t+1} + y_t + 3z_t = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} -x_t + y_{t+1} - y_t = 0, \\ 9y_t - x_{t+1} + x_t = 0 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + y_t, \\ y_{t+1} = x_t + 2y_t \end{cases} \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

5. $$\begin{cases} x_{t+1} = 15x_t - 9y_t, \\ 4x_t - y_{t+1} + 3y_t = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = 2$$

6. $$\begin{cases} x_{t+1} + 2x_t + 3y_t = 0, \\ y_{t+1} + 2y_t + 3x_t = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = \frac{3}{5}$$

7. $$\begin{cases} x_{t+1} = x_t, \\ y_{t+1} = 3y_t + x_t + 2z_t, \\ z_{t+1} = x_t + 2z_t \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x_{t+1} - 3x_t + 4z_t = 0, \\ y_{t+1} - 4x_t - y_t - 4z_t = 0, \\ z_{t+1} - 3z_t - 2x_t = 0 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x_{t+2} + 6x_t + 7y_t = 0, \\ y_{t+2} + 2y_t + 3x_t = 0 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} -x_{t+1} + 4x_t + y_{t+3} + 3y_{t+2} - 14y_t = 0, \\ x_{t+1} - x_t + y_{t+2} - y_t = 0 \end{cases}$$

## 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales No Homogéneos

**Consigna:** Hallar la solución general de los siguientes sistemas no homogéneos. En los casos en que se establezcan condiciones iniciales, hallar la solución particular. Determinar la estabilidad.

11.
$$\begin{cases} x_{t+1} - \dfrac{5}{8}x_t - \dfrac{1}{8}y_t = -2, \\ y_{t+1} - \dfrac{5}{8}y_t - \dfrac{1}{8}x_t = 10 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x_{t+1} - 12y_t - x_t = 6, \\ x_t + 6y_t + y_{t+1} = 9 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} 2x_{t+1} - 3x_t + 5y_t = 2, \\ 2x_t + y_{t+1} - 2y_t = 7 \end{cases} \qquad x_0 = \frac{10}{9}, \quad y_0 = -\frac{43}{9}$$

14.
$$\begin{cases} y_{t+1} - y_t - x_t = 2^t, \\ 9y_t - x_{t+1} + x_t = 5 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} x_{t+1} - x_t + y_t = 3^t, \\ y_{t+1} + y_t + 3x_t = 9 \cdot 3^t \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} x_t + y_{t+1} - 7y_t = -3^t, \\ x_{t+1} + 3y_t - 5x_t = -3^{t+1} \end{cases} \qquad x_0 = 2, \quad y_0 = \frac{2}{3}$$

17. Dado el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} y_{t+2} - y_t - x_t + x_{t+1} = h_{1,t}, \\ y_{t+1} + y_t + 2x_t = h_{2,t} \end{cases}$$

Se pide:

**a)** Hallar la solución del sistema homogéneo.

**b)** Hallar la solución particular del sistema completo si $h_{1,t} = 0,\ h_{2,t} = 2$.

**c)** Hallar la solución particular del sistema completo si $h_{1,t} = 0,\ h_{2,t} = 2t - 1$.

**d)** ¿Qué forma de solución particular hubiese ensayado si $h_{1,t} = t,\ h_{2,t} = 2t - 1$?

18.

$$\begin{cases} x_{t+1} + 3x_t + 4z_t = 2^{t+3}, \\ y_{t+1} - 4x_t - y_t - 4z_t = 0, \\ z_{t+1} - 3z_t - 2x_t = 5^t \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} y_{t+1} + 4x_t + z_t = -9, \\ z_{t+1} + x_t - 9 = 0, \\ x_{t+1} + \dfrac{1}{16}y_t - \dfrac{1}{4}x_t = \dfrac{9}{16} \end{cases} \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = -3, \quad z_0 = 18$$

20. Dado el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{bmatrix} E+3 & 2 \\ -2 & E-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \mathbf{H}_t$$

Se pide:

**a)** Hallar la solución del sistema homogéneo.

**b)** Hallar la solución general si $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ 0 \end{bmatrix}$.

**c)** Indicar qué solución particular ensayaría si:

i) $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (-1)^t$

iii) $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (-2)^t$

# 3. Análisis de Estabilidad

**Consigna:** Analizar la estabilidad de la solución de los siguientes sistemas.

21.
$$\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{1}{2}x_t - y_t, \\ y_{t+1} = \dfrac{1}{2}x_t + \dfrac{1}{3}y_t \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{3}{4}x_t + \dfrac{1}{5}z_t, \\ y_{t+1} = \dfrac{1}{2}y_t + \dfrac{1}{3}z_t, \\ z_{t+1} = \dfrac{1}{4}x_t + \dfrac{1}{4}y_t + \dfrac{1}{2}z_t \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} -4x_t + 20x_{t+1} + 5y_t = 5z_t, \\ 2x_t - 3y_t + 6y_{t+1} = 0, \\ -3y_t + 10z_t + 15z_{t+1} = 0. \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{3}{5}x_t + \dfrac{1}{4}y_t, \\ y_{t+1} = \dfrac{2}{5}y_t + \dfrac{1}{3}z_t, \\ z_{t+1} = \dfrac{2}{5}z_t + \dfrac{1}{4}y_t. \end{cases}$$

# 4. Conversión de Ecuaciones a Sistemas

**Consigna:** Convertir las siguientes ecuaciones en sistemas de ecuaciones en diferencias de primer orden y hallar su solución general.

25. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 0$

26. $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

27. $y_{n+2} - y_{n+1} + \dfrac{2}{9}y_n = 0$

28. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$

# 5. Aplicaciones y Modelos Económicos

## 5.1. Modelo de la Telaraña

29. Dado el modelo general de la telaraña:

$$\begin{cases} D_t = \alpha - \beta p_t, \\ S_t = -\gamma + \delta p_{t-1}, & \text{con } \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \\ D_t = S_t \end{cases}$$

**a)** Encuentre la ecuación en diferencias que define la trayectoria temporal del precio.

**b)** Establezca, sin resolver la ecuación, bajo qué condiciones el modelo es estable.

**c)** Encuentre el precio de equilibrio $p_e$.

**d)** Hallar la solución general $p_t$ sabiendo que $p(0) = p_0$.

30. Para cada uno de los siguientes modelos de mercado:

I)
$$\begin{cases} D_t = 80 - 4p_t, \\ S_t = -10 + 2p_{t-1}, \end{cases} \qquad p_0 = 20.$$

II)
$$\begin{cases} D_t = 30 - 5p_t, \\ S_t = -45 + 10p_{t-1}, \end{cases} \qquad p_0 = 8.$$

III)
$$\begin{cases} D_t = 100 - 2p_t, \\ S_t = -20 + 3p_{t-1}, \end{cases} \qquad p_0 = 25.$$

Se pide:

**a)** Hallar el precio de equilibrio y analizar la estabilidad del modelo.

**b)** Obtener la trayectoria temporal del precio $p_t$.

**c)** Realizar el diagrama de fase (diagrama de la telaraña).

31. El modelo de la telaraña puede generalizarse considerando expectativas adaptativas sobre el precio. El precio esperado en $t-1$ para el período $t$ es $p_t^e = p_{t-1} + \theta(p_e - p_{t-1})$, donde $p_e$ es el precio de equilibrio y $0 < \theta \leq 1$.

$$\begin{cases} D_t = \alpha - \beta p_t, \\ S_t = -\gamma + \delta p_t^e, \\ D_t = S_t \end{cases}$$

**a)** Obtenga la ecuación en diferencias que define el modelo e indique el precio de equilibrio.

**b)** Para el caso particular $D_t = 100 - 2p_t$ y $S_t = -20 + 3p_t^e$, encuentre la trayectoria temporal del precio e indique para qué valores de $\theta$ la trayectoria es estable.

## 5.2. Otros Modelos Económicos

32. **(Modelo de Lotka-Volterra)** Considere el siguiente modelo poblacional de dos especies: conejos ($x$) y zorros ($y$).

$$\begin{cases} \Delta x_t = \alpha x_t - \beta x_t y_t, \\ \Delta y_t = \delta y_t x_t - \gamma y_t \end{cases}$$

La población de conejos se reproduce con un factor $\alpha$ y es cazada por los zorros con un factor $\beta$. La población de zorros se reproduce con un factor $\delta$ al alimentarse de conejos y fallece por causas naturales con un factor $\gamma$. Se pide encontrar los puntos de equilibrio del sistema, linealizarlo en torno a ellos y determinar su estabilidad.

33. **(Modelo de Inventarios)** Dado el siguiente modelo:

$$\begin{cases} D_t = a - bP_t \quad a, b > 0, \\ S_t = -c + dP_t \quad c, d > 0, \\ P_{t+1} = P_t - \Phi(S_t - D_t) \quad \Phi > 0, \end{cases}$$

**a)** Obtenga la ecuación que define el modelo e indique el precio de equilibrio.

**b)** Para el caso: $D_t = 23 - 4P_t$, $S_t = -2 + 6P_t$, $P_{t+1} = P_t - \frac{1}{5}(S_t - D_t)$, hallar el precio de equilibrio y determinar la trayectoria temporal del precio considerando $P_0 = 10$.

34. **(Modelo de Samuelson)** Sea el siguiente modelo de ingreso nacional:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + \overline{G}, \\ C_t &= cY_{t-1} \quad 0 < c < 1, \\ I_t &= b(C_t - C_{t-1}) \quad b > 0, \end{aligned}$$

donde $Y$ es el Ingreso, $C$ el consumo, $I$ la inversión y $\overline{G}$ el gasto público (exógeno).

**a)** Encuentre la ecuación en diferencias que define el modelo en función del ingreso.

**b)** Estudie las condiciones sobre los parámetros $b$ y $c$ para que el modelo sea estable.

**c)** Calcular el ingreso de equilibrio.

35. **(Modelo de Hicks)** En el modelo de Hicks, la inversión se descompone en inducida y autónoma.

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= bY_{t-1} \quad 0 < b < 1, \\ I_t &= k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_0(1+g)^t \quad k > 0, \end{aligned}$$

**a)** Hallar la ecuación que define el modelo en función del ingreso.

**b)** Determinar bajo qué condiciones el modelo es estable.

**c)** Para el caso $b = 0{,}9$, $k = 0{,}4$, $A_0 = 5000$, $g = 0{,}02$, hallar la trayectoria temporal del Ingreso y analizar la estabilidad.

36. **(Modelo de Deuda Pública)** El siguiente sistema representa la posición financiera del gobierno y el resultado fiscal:

$$\begin{cases} B_{t+1} - B_t = G_t + rB_t - T_t, \\ G_t - T_t = (1+\rho)(G_{t-1} - T_{t-1}) \end{cases}$$

donde $G_t$ es el gasto, $T_t$ la recaudación, $B_t$ el stock de deuda, $r$ la tasa de interés y $\rho$ la tasa de crecimiento del déficit/superávit. Sea el déficit $D_t = G_t - T_t$.

**a)** A partir de una deuda inicial $B_0 = 40000$, un superávit fiscal constante $D_t = -500$ y una tasa de interés $r = 8\,\%$ anual, obtenga la trayectoria de la deuda. Calcule la deuda luego de 10 años.

**b)** A partir de las condiciones finales del inciso a), el gobierno logra que el superávit crezca a una tasa del $10\,\%$ anual ($\rho = 0{,}10$). Obtenga las nuevas trayectorias de la deuda y el resultado fiscal. ¿Cuántos años deben transcurrir en total para cancelar la deuda?

37. **(Modelo Inflación-Desempleo)** Dado el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \pi_t = \alpha - \beta U_t + h\pi_t^e, \quad \alpha > 0, \beta > 0, 0 < h \leq 1, \\ \pi_{t+1}^e - \pi_t^e = j(\pi_t - \pi_t^e), \quad 0 < j \leq 1, \\ U_{t+1} - U_t = -k(m - \pi_t), \quad k > 0, \end{cases}$$

donde $\pi$ es la inflación, $U$ el desempleo, $\pi^e$ la inflación esperada y $m$ el crecimiento del dinero.

**a)** Transforme las ecuaciones en un sistema lineal de primer orden en las variables $U_t$ y $\pi_t^e$.

**b)** Encuentre los valores de equilibrio $U_e$ y $\pi_e^e$.

**c)** Analice la estabilidad del sistema.